Шәһәр күләмендә математика фәненнән татар телендә үткәрелә торган олимпиаданың йомгаклау этабы биремнәре
2023-2024 нче уку елы
10 нчы сыйныф

Эш вакыты – 180 минут
Гомуми балл – 25

1. Яссылыкны ирекле 61 өлешкә бүләрлек итеп 12 турыны үткәрегез.

   Чишү. N_x — x микъдары булсын ди. Ул вакытта $N_{\text{өлеш}} = 1 + N_{\text{туры}} + N_{\text{кисешү ноктасы}}$ $(*)$. Дүртешәр параллель турыдан торган 3 төркем сызабыз. Төркем эчендә кисешүләр юк. Ике төркем арасында 4×4 кисешү. Пар төркемнәр саны - 3. Нәтиҗәдә $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ кисешү. Ул вакытта өлешләр саны $1 + 12 + 48 = 61$.

   Критерийлар. (а) Мисал сызылган (яисә тулы аңлатма китерелгән) һәм өлешләр саны нәкъ 61 булуы нигезләнгән - тулы балл (5 балл). (б) мисал ясалган (яисә тулы аңлатма китерелгән), әмма өлешләр санының нәкъ 61 булуы нигезләнмәгән - 3 балл.
   (в) $(*)$ формуласы язылган, әмма алга таба аңлатулар китерелмәгән — 2 балл.

2. 319 999 999 999саны гади сан булып торамы? Нәкъ ике бүлүчесе булган натураль сан - гади сан дип атала. Беренчесе ул үзе, ә икенчесе берле саны.

   Чишү: $319\,999\,999\,999 = 32 \cdot 10^{10} - 1 = 200^5 - 1^5 = 199 \cdot (200^4 + 200^3 + 200^2 + 200 + 1)$. Димәк, бу кушма сан.

   Критерийлар: **(а)** Бары җавап китерелгән — 0 балл. **(б)** Сан үзенә һәм берле санына тигез булмаган тәзүчеләргә таркатылган (формула куллану мәҗбүри тугел, тәзүчеләргә, сайлап карау алымын кулланып таркатылган булырга мөмкин) — 5 балл.

3. ABC өчпочмагының AB, BC һәм CA яклары, тиңдәшле рәвештә, 15, 12 һәм 18 гә тигез. C почмагыннан уздырылган CL биссектрисасында I камаулы әйләнәсенең үзәген тамгалаганнар. $CI{:}\,IL$ табыгыз.

   Чишү. «Биссектрисаның алтын үзлеге»: биссектриса төшкән якны янәшә яткан якларга пропорциональ булган кисемтәләргә бүлә. “Алтын үзлек” буенча $AL = 9$, димәк $CI{:}\,IL = 18{:}\,9 = 2{:}\,1$.
   Критерийлар. (а) Бары тик җавап китерелгән (ABC өчпочмагы өчен өстәмә шартлар кулланып, аерым очрак өчен китерелгән җавап) — 1 балл.

(б) Биссектрисалар бүлгән яклардагы кисемтәләрнең озынлыгы табылган — 2 балл. **(в)** $CI{:}\,IL$ булуы нигезле рәвештә табылган — 5 балл.

4. $2+\cos(x+y)+\cos(x-y) \geq 2\cos x + 2\cos y$ тигезсезлеген исбатлагыз.

   Чишү: Дөрес тигезсезлекне карыйк $2(1-\cos x)(1-\cos y) \geq 0$ (чөнки һәрчак $\cos t < 1$). Җәяләрне ачабыз һәм $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ белән алмаштырабыз. Исбатларга кирәк булган тигезсезлеккә эквивалент булган дөрес тигезсезлекне китереп чыгарабыз.

   Критерийлар: (а) Тигезсезлек теләсә нинди x өчен исбатланган— 5 балл. **(б)** Тигезсезлек бары тик уңай (тискәре) x өчен генә исбатланылган — 3 балл. **(в)** Исбатлауда алга таба фикер йөртүләр юк — 0 балл.

5. Түбәндәге шартларга туры килгән ике икеурынлы санны табыгыз. Зуррак санның уң ягына нуль куеп, янәшәсенә кечерәк санны язсаң, ә кечерәк санның янәшәсенә зуррагын язып, аннан нуль куйсаң, шулай табылган ике бишурынлы санның беренчесен икенчесенә бүлгәннән соң өлештә 2 һәм калдыкта 590 булачак.

   Чишү. Зуррак сан $\overline{ab}$, ә кечерәге — $\overline{cd}$ булсын ди. Ул чакта $\overline{ab0cd} = 2\overline{cdab0} + 590$. Ул вакытта $980\overline{ab} = 1999\overline{cd} + 590$. Ул вакытта $\overline{ab} = 2\overline{cd} + 1 + \frac{39(\overline{cd}-10)}{980}$. Тигезләмәдәге саннар, вакланмадан кала, бөтен сан булганга, вакланма үзе дә бөтен кыйммәтне ала. Ул вакытта $39\left(\overline{cd}-10\right) \vdots 980$. 39 саны 980 белән үзара гади саннар, ә $0 \leq \overline{cd} - 10 \leq 89$. $\overline{cd} - 10 \vdots 980$ булганга, $\overline{cd} - 10 = 0$. Димәк, $\overline{cd} = 10$, $\overline{ab} = 21$.
   Критерии. (а) Бары тик җавап китерелгән — 1 балл. **(б)** Тулы чишелеш китерелгән — 5 балл.